



## Instruções de Prova

Duração da prova: 5 horas.

**As folhas não podem ter nenhum tipo de identificação ou nome do estudante.**

As resoluções devem ser feitas em folhas de papel avulsas e originalmente em branco.

A resolução de cada problema deve ser enviada em um documento PDF separado com tamanho máximo de 10 Mbytes.

## Pedras Saltitantes (12 pontos) <sup>1</sup>

Leia a página de instruções gerais antes de começar este problema.

### Introdução

Neste problema iremos analisar a física de uma brincadeira comum de crianças, em que elas jogam pedras na água com uma certa velocidade fazendo que as pedras “saltitam” na superfície da água, percorrendo uma longa distância até afundarem na água. Na Parte **A** deste problema iremos apresentar um modelo simplificado do problema e achar condições limitantes para o fenômeno ocorrer. Na Parte **B** iremos considerar dissipações no nosso modelo, e acharemos outra condição limitante para a pedra saltar. Por fim, na Parte **C**, analisaremos o movimento da pedra, pensando no número de colisões e distância percorrida pela pedra.

### Parte A - Modelo aproximado das colisões (3,9 pontos)

Vamos considerar um modelo simplificado do problema, onde a pedra que lançamos tem um formato quadrado, com lado  $l$ . A pedra possui uma pequena espessura muito menor que  $l$ , e a massa da mesma é  $M$ . Iremos também considerar que a superfície do lago em que jogamos a pedra é perfeitamente plana, alinhada com o eixo horizontal. Adicionalmente, dois parâmetros importantes para o problema são os ângulos:  $\theta$  o ângulo entre a superfície da pedra e a horizontal, e  $\beta$  o ângulo de incidência entre a velocidade da pedra e a horizontal, ambos indicados na figura (1) abaixo.

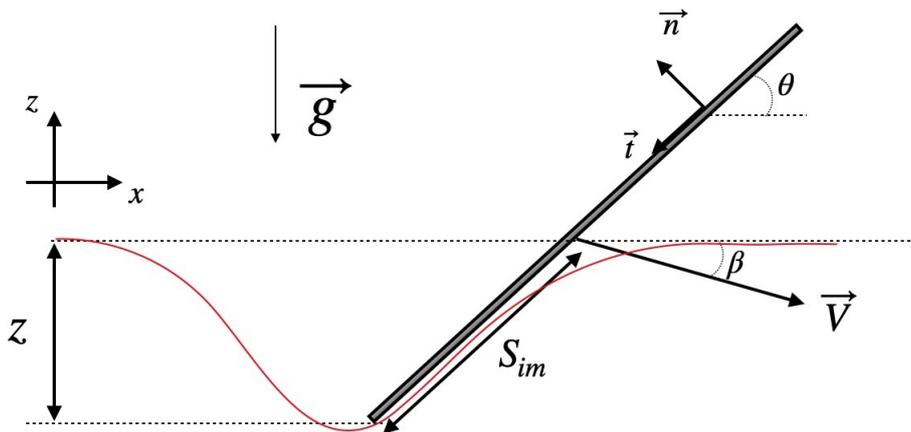


Figura 1: Ilustração representando a geometria considerada. A linha cheia representa a superfície da água que fica distorcida devido ao movimento da pedra. Também estão definidos os ângulos relevantes no problema. Perceba que a quantia  $z$  mede a altura entre o nível original da água e o ponto mais profundo da pedra.

Adotaremos um sistema de coordenadas cartesianas para o sistema, onde o eixo  $x$  está alinhado com a superfície da água, e o eixo  $z$  aponta positivamente para cima com  $z = 0$  sendo a superfície da água. Dessa forma, lançaremos a pedra na água com um vetor velocidade  $\vec{V}$ , com uma inclinação  $\beta$  como disposta acima.

A chave do problema será analisar a força de reação da água na pedra, causada pelo movimento da pedra na água. Neste problema consideramos um modelo simplificado para essa força, que embora seja simplista, permite extrair várias previsões para o fenômeno. Consideraremos a seguinte expressão para a força exercida pela água sobre a pedra, em função dos vetores de módulo unitário,  $\vec{n}$  e  $\vec{t}$ , na direção normal e tangencial da pedra respectivamente como na figura (1)

$$\vec{F} = \frac{1}{2}C_l\rho V^2 S_{im} \vec{n} + \frac{1}{2}C_f\rho V^2 S_{im} \vec{t} \quad (1)$$

Onde,  $V$  é a velocidade total da pedra  $V^2 = V_x^2 + V_z^2$ ,  $\rho$  a densidade da água,  $C_l$  e  $C_f$  dois coeficientes provenientes da força de contato com a água – que assumiremos constantes neste problema – e  $S_{im}$  a área da

<sup>1</sup>Autoria de Thomas Bergamaschi

superfície imersa, como disposto na figura (1). Note que geralmente os coeficientes  $C_l, C_f$  dependeriam dos ângulos  $\beta, \theta$ , mas consideraremos que são constantes neste problema. Adicionalmente, considere que  $\beta$  é um ângulo pequeno, tal que a componente horizontal  $V_x$  da velocidade é muito maior que a componente vertical  $V_z$ . Este regime de forças em função da velocidade é mais adequado para grandes velocidades  $V$ , e maiores ângulos de incidência, mas mesmo assim conseguiremos extrair previsões a partir deste modelo.

Para computar a área da superfície imersa  $S_{im}$ , considere que a pedra não está rotacionando, de tal forma que a pedra possui sempre dois lados alinhados ao eixo  $y$  (entrando no papel). Na nossa aproximação assumamos que a área  $S_{im}$  é tal que a água mantenha contato com a pedra totalmente até a água voltar a ser horizontal. Dadas essas definições vamos analisar a dinâmica do sistema.

**A.1** Escreva uma expressão para a área submersa  $S_{im}$  da pedra em função de  $z, l, \theta$ . 0,5pt

Dada a expressão acima para  $S_{im}$ , podemos encontrar as equações de movimento do sistema. Para isso, ignore a componente da força devido ao empuxo/impulsão da água – o que é justificado para pedras suficientemente densas. Por enquanto no entanto, não assumamos que  $V_x \gg V_z$ .

**A.2** Escreva a aceleração vertical e horizontal da massa  $a_x$  e  $a_z$  respectivamente. 0,5pt

Dadas as equações de movimento acima, agora assumamos que  $V_x \gg V_z$ , para podermos extrair o movimento  $z(t)$ , e também assumamos que a **velocidade horizontal da pedra permaneça aproximadamente constante** ao longo da colisão da pedra com a água. Além disso, considere que os **ângulos  $\theta, \beta$  permanecem constantes** durante o período da colisão da pedra com a água.

Lembre-se que  $z(0) = 0$ , e use que velocidade original ao longo do eixo  $z$  é  $V_z^0$ .

**A.3** Considerando as aproximações descritas acima, ache  $z(t)$ . 1,0pt

Agora, precisamos pensar em uma condição limitante para a pedra não conseguir sair mais da água. Para analisar isso de forma simplista, iremos assumir que se a pedra se submergir totalmente na água durante o movimento, ela não conseguirá sair novamente da água. A justificativa disso é baseada no fato de que se a pedra ficar submergida totalmente, a força de sustentação atuando na pedra pela água irá diminuir consideravelmente, sendo incapaz de erguer a pedra novamente.

**A.4** Baseado na discussão acima, escreva a condição limitante para a profundidade máxima  $z$ . 0,5pt

**A.5** Encontre a velocidade limitante  $V_{min}$  para que a pedra faça um pulo na água. 0,9pt

Com isso, encontramos uma condição limitante para a velocidade mínima que precisamos dar a pedra para ela conseguir “saltar” na água. Na próxima parte deste problema iremos analisar uma outra condição limitante para o problema, relacionada com a dissipação de energia. Antes disso no entanto, esse modelo simplificado permite que encontremos uma condição limitante para o ângulo  $\theta$ , já que é natural se esperar que se  $\theta$  for muito grande não existirá uma componente vertical da força grande suficiente para erguer a pedra.

**A.6** Encontre o intervalo de valores para  $\theta$  para que a pedra possa fazer um salto na água. 0,5pt

## Parte B - Dissipação de Energia (4,6 pontos)

Na primeira parte do problema analisamos as condições limitantes do fenômeno considerando apenas o movimento vertical da pedra na água. Agora, note que neste movimento, parte da energia inicial da pedra é dissipada, já que existe uma componente da força na equação (1) que aponta no eixo  $-x$ , contra a direção do movimento. Aqui, estimaremos quanta energia é dissipada devido a essa força horizontal  $F_x$  durante cada processo de colisão com a água, e com isso conseguiremos analisar quando essa força faz com que a pedra pare. Novamente, considere as mesmas **aproximações que foram usadas na parte A**.

Calcularemos o trabalho dissipado,  $W < 0$ , que essa força  $F_x$  dissipa. Com isso, iremos obter a velocidade horizontal da pedra após a colisão  $V'_x$  em função da velocidade horizontal original  $V_x$ .

**B.1** Considerando dissipação, escreva a relação entre  $V'_x$ ,  $V_x$  e o trabalho dissipado  $W$ . 0,5pt

Para obter  $W$ , precisamos considerar um conjunto de aproximações para o movimento da pedra. Assumiremos que a pedra permanece a uma velocidade aproximadamente constante durante o processo de colisão com a água, e que este processo dura um tempo  $t_{col}$  que logo iremos calcular. Além disso, é conveniente escrever a resposta em função da força média no eixo  $x$  durante o processo de colisão  $\langle F_x(t) \rangle$ .

**B.2** Ache  $W$  em função de  $V_x$ , o valor medio da força em  $x$ ,  $\langle F_x(t) \rangle$ , durante a colisão, e o tempo da colisão,  $t_{col}$ . 0,6pt

**B.3** Usando os resultados da parte **A**, escreva uma expressão para o tempo de colisão  $t_{col}$ . 0,5pt

**B.4** Novamente voltando para a parte **A**, ache uma relação familiar entre  $F_x$  e  $F_z$ , similar à força de atrito comum, da forma  $F_x = \mu F_z$ , e encontre  $\mu$  em função de constantes do sistema. 0,5pt

Com base na relação acima, temos que  $\langle F_x(t) \rangle = \mu \langle F_z(t) \rangle$ , onde  $\langle F_z(t) \rangle$  é o valor médio da força vertical atuando na massa, que pode ser calculado usando resultados da parte **A**.

**B.5** Obtenha  $\langle F_z(t) \rangle$  e conseqüentemente  $\langle F_x(t) \rangle$ . 1,0pt

**B.6** Com base nos itens anteriores, escreva  $V'_x$  em função de  $V_x$  e constantes básicas do sistema. Também escreva uma expressão para a velocidade mínima da pedra para ela saltar na água. 1,0pt

Com isso, obtemos uma condição adicional para que a pedra consiga saltar da água. Naturalmente, se o lançamento da pedra satisfazer essas duas condições, esperamos que seja possível observar o fenômeno da pedra saltando na água. Para isso, utilize a tabela abaixo para constantes:

| $C_l$ | $C_f$ | $\rho$                 | $l$    | $g$                   | $\beta$ | $\theta$ | M       |
|-------|-------|------------------------|--------|-----------------------|---------|----------|---------|
| 1     | 1     | 1000 kg/m <sup>3</sup> | 0,05 m | 9,81 m/s <sup>2</sup> | 10°     | 10°      | 0,05 kg |

**B.7** Com base nos valores de constantes fornecidas acima, calcule a velocidade mínima para a pedra fazer um salto na água. Novamente usando essas constantes, escreva qual das duas condições para a velocidade é mais limitante que a outra. 0,5pt

Com estes resultados para as velocidades mínimas, na próxima parte iremos analisar o movimento da pedra entre saltos sucessivos.

### Parte C - O Movimento da Pedra(3,5 pontos)

Nesta parte, iremos analisar o número total de saltos feitos pela pedra, e a distância percorrida entre saltos sucessivos. Para isso, precisamos da velocidade da pedra após a  $n$ -ésima colisão. Assuma que o **ângulo  $\theta$  é o mesmo para todas as colisões**.

**C.1** Assumindo uma velocidade inicial de  $V_x^{(0)}$ , escreva uma expressão para  $V_x^{(n)}$ , a velocidade depois da  $n$ -ésima colisão. 1,0pt

Com esse resultado, podemos obter o número total de saltos que a pedra faz na água.

|            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>C.2</b> | Escreva uma expressão para o número total de colisões, $N_{col}$ . | 1,0pt |
|------------|--|-------|

|            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>C.3</b> | Sabendo que o recorde mundial para o número de saltos é $N_{max} = 88$ , e utilizando as constantes dadas na parte <b>B</b> , estime a velocidade inicial $V_x^{(0)}$ no eixo $x$ para atingir este número de saltos. | 0,5pt |
|------------|---|-------|

Entre sucessivos saltos na água, a pedra faz uma trajetória pelo ar característica de um lançamento oblíquo regular. Com isso podemos calcular a distância percorrida entre sucessivos saltos.

|            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>C.4</b> | Encontre a distância percorrida horizontalmente pela pedra entre a $n$ -ésima e $n + 1$ -ésima colisão $\Delta X(n)$ , e esboce este gráfico. | 1,0pt |
|------------|---|-------|

Esse perfil de  $\Delta X(n)$  esboçado é qualitativamente visto ao jogarmos pedras no lago, já que nos últimos saltos a pedra passa a fazer saltos curtos e em rápida sucessão.

## Duplo oscilador (9 pontos)<sup>2</sup>

### Parte A - Oscilador LC (1 ponto)

Capacitores/condensadores e indutores são elementos básicos de circuitos osciladores. O circuito considerando gera uma oscilação elétrica em que ora a energia é armazenada ora no capacitor/condensador, no qual carga elétrica é armazenada, ora no indutor, no qual a passagem de corrente gera um campo magnético na vizinhança do indutor. Considere um capacitor/condensador ideal de capacitância/capacidade  $C$  em série com um indutor ideal de indutância  $L$ .

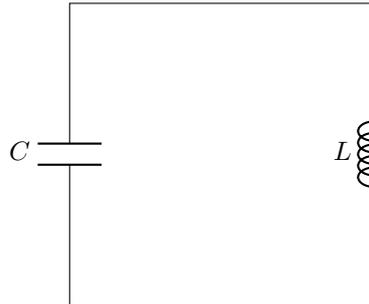


Figura 2: Circuito LC.

A carga elétrica armazenada no capacitor/condensador do circuito LC pode ser representada por uma função harmônica  $Q(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , na qual a frequência angular  $\omega$  pode ser escrita apenas em termos de um produto de potências de  $L$  e  $C$ .

**A.1** Determine a frequência angular  $\omega$  do oscilador LC.

1,0pt

### Parte B - Oscilador duplo (4 pontos)

Com base no circuito apresentado anteriormente, apresentamos na figura a seguir um oscilador duplo, composto por um capacitor/condensador ideal de capacitância/capacidade  $C$ , duas chaves/interruptores, dois indutores ideais de indutâncias  $L_1$  e  $L_2$  ( $L_2 = 4L_1$ ) e dois diodos ideais. Veja a figura a seguir. Diodos ideais são elementos de circuito que permitem a passagem de corrente elétrica em um sentido, com resistência elétrica nula, enquanto a passagem no sentido reverso é proibida.

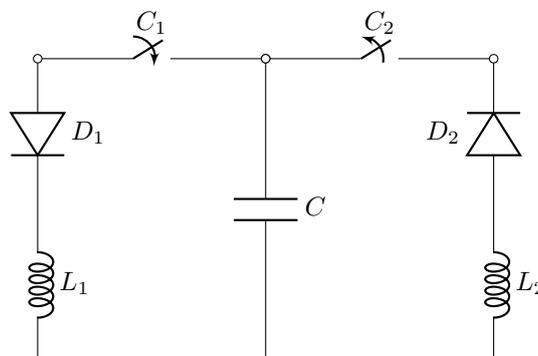


Figura 3: Circuito com duplo oscilador.

O oscilador é preparado de tal forma que, em  $t = 0$ , o capacitor/condensador possui carga inicial  $Q_0 > 0$ , a chave/interruptor  $C_1$  é inicialmente fechada e a chave/interruptor  $C_2$  encontra-se aberta. Dessa maneira

<sup>2</sup>Autoria de Vinícius Névoa

surge uma corrente elétrica na malha esquerda do circuito. Quando a corrente se anula, a posição das chaves/interruptores se inverte de forma instantânea, isto é,  $C_1$  abre e  $C_2$  fecha. Passa a correr corrente na malha direita do circuito. Quando a corrente na malha direita se anula, há uma nova comutação de chaves/interruptores:  $C_1$  fecha e  $C_2$  abre. O processo segue dessa maneira de forma indefinida.

A respeito do circuito descrito, responda o que se pede.

**B.1** Determine o período de oscilação  $T$  desse circuito. Deixe sua resposta em termos de  $L_1$  e  $C$ . 1,25pt

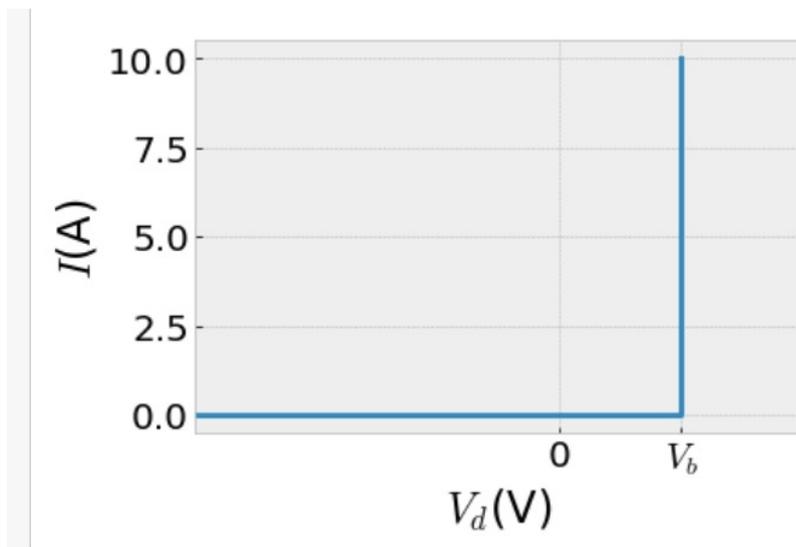
**B.2** Esboce o gráfico da carga  $Q(t)$  armazenada no capacitor em função do tempo, destacando quantidades relevantes. 1,25pt

**B.3** Esboce o gráfico da corrente  $I(t)$  que passa pelo indutor em função do tempo, destacando quantidades relevantes. Escreva a função correspondente a esse gráfico. 1,0pt

**B.4** O circuito descrito apresenta algum tipo de perda? Se sim, aponte em que elemento do circuito acontece a perda. 0,5pt

Os diodos podem ser fabricados através de uma junção entre semicondutores do tipo P (ânodo) e do tipo N (cátodo). A polarização é direta ocorre quando o polo positivo da fonte geradora entra em contato com o lado do ânodo e o polo negativo da fonte geradora entra em contato cátodo, permitindo que o diodo conduza corrente.

No entanto, em dispositivos reais, para que essa corrente elétrica possa fluir é preciso polarizar o diodo com uma diferença de potencial  $V_b$ . Um modelo mais refinado de diodo é, portanto, é um dispositivo que permite a passagem de corrente elétrica apenas quando a diferença de potencial entre seus terminais é superior a  $V_b$ . Considere que a resistência interna do diodo ainda possa ser considerada nula. O gráfico da corrente elétrica  $I$  que atravessa o diodo real descrito acima em função da tensão elétrica  $V$  entre os seus terminais é, na região de interesse:



### Parte C - Oscilador duplo com diodos reais (4 pontos)

Nessa parte do problema, consideraremos o efeito da tensão de polarização direta dos diodos sobre o duplo oscilador apresentado. Considere que a tensão de polarização dos diodos é dada por  $V_b$  e sua resistência interna é nula.

**C.1** Faça um esboço do comportamento do circuito em um diagrama carga  $Q(t)$  em função do tempo. Considere a mesma condição inicial anterior (carga inicial  $Q_0$  e corrente inicial nula) e um intervalo de tempo entre 0 e  $2T$ . Indique o valor final da carga do capacitor/condensador,  $Q(2T)$ , no seu esboço. 2,0pt

**C.2** Supondo que  $V_b \ll Q_0/C$ , estime o tempo para que a energia total armazenada no circuito caia para metade. 2,0pt

## Detecção de Múons/Muões (9 pontos)<sup>3</sup>

A radiação cósmica é composta por partículas energéticas de origem solar e extragaláctica, e são compostas essencialmente por prótons (87%), partículas alfas (12%) e núcleos de íons/iões pesados ( $\approx 1\%$ ). Quando os raios cósmicos chegam à Terra, eles incidem violentamente sobre moléculas da atmosfera e geram, entre outros efeitos, o surgimento de partículas instáveis como os múons/muões.

O múon/muão é uma partícula cuja massa é cerca de 200 vezes maior do que a do elétron/eletrão,  $m=105,66 \text{ MeV}/c^2$ , em que elétron-volt (eV) é unidade de energia,  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , e o seu tempo de meia-vida  $T_{1/2}=2,2\mu\text{s}$ , em que meia-vida é o tempo necessário para que metade dos múons/muões decaiam. No problema a seguir, investigaremos um pouco sobre aspectos físicos envolvidos na sua detecção na atmosfera, no solo e no subsolo.

### Parte A - Detecção de múons/muões no solo (2,5 pontos)

Experimentos de múons/muões atmosféricos podem fornecer informações da dinâmica da atmosfera. Pesquisadores observam variações no fluxo de múons/muões em solo entre diferentes épocas do ano. Por exemplo, em uma dada região, quando é verão, a atmosfera se expande e a região de maior produção de múons/muões é deslocada para maiores altitudes. Consequentemente, observa-se no solo uma diminuição da quantidade de múons/muões de baixas energias ao nível do mar.

Nessa primeira parte do problema, nos ocuparemos em explicar a detecção de múons/muões em solo. Suponha que esses múons/muões sejam produzidos em uma incidência vertical para baixo, depois de sua produção não há interação com átomos da atmosfera e que a energia cinética típica dessas partículas é muito alta, da ordem de  $K_0 \approx 1,5 \text{ GeV}$ .

|            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>A.1</b> | Estime a distância típica percorrida por múons/muões durante um tempo de meia-vida $T_{1/2}$ no referencial dos múons/muões. | 1,0pt |
|------------|--|-------|

O resultado do item anterior sugere uma altitude  $h_0$  a partir da qual torna-se improvável que os múons/muões gerados sejam detectados em solo. No entanto, devido a efeitos relativísticos boa parte dos múons/muões gerados em altas altitudes, a quilômetros acima do nível do solo, podem ser detectados na superfície da Terra.

|            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>A.2</b> | Estime a distância típica que múons/muões de energia cinética $K_0$ podem percorrer na atmosfera terrestre. | 1,5pt |
|------------|---|-------|

### Parte B - Espectro de energia de múons/muões (3,5 pontos)

Em observações reais não se observam múons/muões com apenas uma única energia cinética, mas uma distribuição de energias. Considere que um detector mede o fluxo de múons/muões  $\phi$  por unidade de área e tempo, para quatro diferentes energias cinéticas  $K$ , conforme ilustrado no gráfico a seguir. As medidas são realizadas a 12,5 km de altitude.

|            |   |       |
|------------|---|-------|
| <b>B.1</b> | Com base nas informações fornecidas, calcule o fluxo total e a energia cinética média $E_1$ dos múons/muões produzidos a 12,5 km de altitude. | 0,5pt |
|------------|---|-------|

Devido ao curto tempo de meia-vida dos múons/muões, os seus fluxos e a energias médias do variam com a altitude devido ao efeito do decaimento do múon/muão.

|            |  |       |
|------------|--|-------|
| <b>B.2</b> | Calcule a energia cinética média $E_2$ dos múons/muões gerados a 12,5 km de altitude e detectados no solo. | 3,0pt |
|------------|--|-------|

<sup>3</sup>Autoria de Maurício Pazianotto

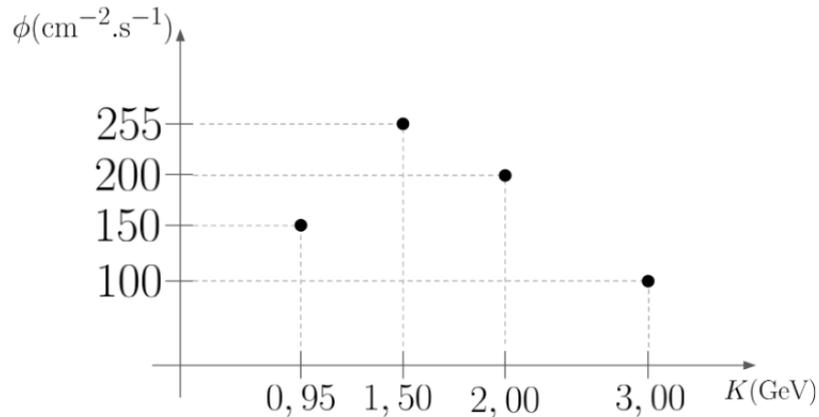


Figura 4: Fluxo de múons/muões por unidade de energia medida a 12,5 km de altitude.

### Parte C - Aplicações e detecção no subsolo (3 pontos)

Partículas como os múons/muões, dependendo da sua energia podem ter diferentes aplicações. Considere que o tamanho de uma ligação atômica é de  $10^{-10}$  m (1 Å), o tamanho do núcleo da matéria tenha dimensões da ordem de  $10^{-15}$  m (1 fm),  $\hbar \cdot c = 197,3$  MeV.fm e  $\hbar = h/2\pi$ , em que  $h$  é a constante de Planck.

- |   |       |
|---|-------|
| <p><b>C.1</b> Múons/Muões produzidos com 0,95 GeV poderiam ser usados em estudos de estrutura cristalina de materiais ou da estrutura nuclear? Justifique sua resposta.</p> | 2,0pt |
|---|-------|

Múons/Muões produzidos a uma altitude de 12,5 km que chegam ao solo podem penetrar no interior da Terra até uma profundidade considerável. Nesse processo, o múon/muão perde sua energia por processo de ionização de forma aproximadamente constante, com o taxa de  $10 \text{ MeV} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^2$  por unidade de área e unidade de massa do solo. Sabe-se que a densidade volumétrica de massa do solo é de densidade de  $1,50 \text{ g/cm}^3$ .

- |   |       |
|---|-------|
| <p><b>C.2</b> Estime a profundidade máxima que estes múon/muão podem penetrar no solo. Despreze possíveis dispersões.</p> | 1,0pt |
|---|-------|